Title	関数による平均値の比較不等式について (不等式に関する研究)
Author(s)	安藤, 四郎
Citation	数理解析研究所講究録 (1973), 191: 78-80
Issue Date	1973-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/107246
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
191 巻 1973 年 78-80

関数による平均値の比較不等式について

法政大 工 安藤四郎

1、関数による平均値

関数φが区間Iで連続で単調なとき，Iに属するn個の数$a_1, \cdots, a_n$と，$p_i > 0$，$\sum p_i = 1$となる$p_1, \cdots, p_n$に対し

$$M_\varphi = \varphi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} p_i \varphi(a_i)\right\}$$

を，関数φによる，$\{p_i\}$を重みとする$\{a_i\}$の平均値という.

同じ区間Iで定義された2つの単調な連続関数φ，ψについて，M_φとM_ψを比較する次の命題はよく知られている、（[2]，p. 60）

命題　ψが区間Iで単調増加（減少）で，$\psi \circ \varphi^{-1}$が（狭義の）凸（凹）関数ならば，

$$M_\varphi \leqq M_\psi$$

ここで，等号が成り立つのは$a_1 = \cdots = a_n$の場合に限る、

2. 比較判定関数

関数φ，ψが2回微分可能で，1階導関数が定符号ならば，条件をもう少し使いやすい形で表わすことができる．φに，

$$\varphi^*(x)=\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}$$

で定義される比較判定関数φ^*を対応させる．このとき，

定理　区間Iで$\varphi^*<\psi^*$ならば，$M_\varphi \leqq M_\psi$．

ここで，等号が成り立つのは$a_1=\cdots=a_n$の場合に限る．

報告者ははじめ，φを$\Phi=a\varphi+b$に変えてもM_φおよびφ^*が変わらないことから，$x=M_\psi$の点で接するΦとψを比較して直接定理を得たが，

$$\chi(x)=(\psi\circ\varphi^{-1})(x)\quad,\quad \varphi^{-1}(x)=t$$

とおくと，

$$\chi''(x)=\frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)^2}\left\{\frac{\ddot{\psi}(t)}{\dot{\psi}(t)}-\frac{\ddot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}\right\}$$

となるから，前の命題から直ちに定理が得られる．

このように，この定理は前の命題の言いかえに過ぎないが，φ^*は比較する相手に関係なく求められるので，この形の方が便利だと思う．

3、応用例

ここで，$p_1=\cdots=p_n$ として，不等式を導く例を示す、

例1　$\varphi(x)=\log x$ ，$\psi(x)=\log(1+x)$ $(x>0)$

のとき，$\varphi^*(x)=-\dfrac{1}{x}<-\dfrac{1}{1+x}=\psi^*(x)$ だから，

$a_i>0$ に対し，次の関係が成り立つ、

$$M_\varphi=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\leqq M_\psi=\sqrt[n]{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}-1$$

$$(1+a_1)\cdots(1+a_n)\geqq(1+\sqrt[n]{a_1\cdots a_n})^n$$

例2　$\varphi(x)=\log x$，$\psi(x)=\dfrac{x}{1+x}$ $(0<x<1)$

のとき，$\varphi^*(x)=-\dfrac{1}{x}<-\dfrac{2}{1+x}=\psi^*(x)$ となる、

$0<c_i<\dfrac{1}{2}$ $(i=1,\cdots,n)$ に対し，$a_i=\dfrac{c_i}{1-c_i}$

とおくと，$0<a_i<1$ 、よって，

$$M_\varphi=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=\sqrt[n]{\frac{\Pi c_i}{\Pi(1-c_i)}}\leqq M_\psi=\frac{\Sigma c_i}{\Sigma(1-c_i)}$$

これから，次の Ky Fan の不等式（〔1〕，p.60）を得る、

$$\frac{\Pi c_i}{(\Sigma c_i)^n}\leqq\frac{\Pi(1-c_i)}{(\Sigma(1-c_i))^n}$$

文献　〔1〕大関信雄，青柳雅計：不等式（昭42）槙書店

〔2〕渡部隆一：不等式入門（1969）森北出版

〔3〕安藤四郎：平均値概念の定式化について（1968）芝浦工大研究報告16